# 7.11 ¿Qué es la investigación operativa y para qué puede servirnos?

La IO abarca un amplio conjunto de métodos y herramientas que sirven para optimizar las decisiones en organizaciones sanitarias. El abanico de aplicaciones abarca desde la planificación de infraestructuras y zonificación sanitaria hasta la gestión del día a día de los recursos humanos (guardias, turnos) o la programación de rutas de visitas domiciliarias y tareas

***Beatriz González López-Valcárcel***

***Patricia Barber Pérez***

*Universidad de Las Palmas de GC*

Se recomienda imprimir 2 páginas por hoja

***Citación recomendada:***

Gonzalez lópez-Valcarcel B. Barber Pérez P. ¿Qué es la investigación operativa y para qué puede servirnos? [Internet]. Madrid: Escuela Nacional de Sanidad; 2012 [consultado día mes año]. Tema 7.11 Disponible en: direccion url del pdf.



**Resumen:**

Este capítulo introduce la Investigación Operativa (IO) como conjunto de herramientas que ayudan a tomar decisiones en organizaciones complejas, y formula algunos ejemplos de aplicación en sanidad, entrando en algún detalle en los modelos de teoría de las colas, la programación lineal y las cadenas de markov. El objetivo es presentar las posibilidades de los métodos en el ámbito sanitario (planificación y gestión), sin profundizar en su formulación matemática

## 1. ¿Qué es la investigación operativa?

**La investigación** operativa (IO) aplica el método científico para asignar los recursos o actividades de forma eficaz, en la gestión y organización de sistemas complejos. Su objetivo es ayudar a la toma de decisiones, y su enfoque es interdisciplinar.

*Aplica el método científico para asignar los recursos o actividades de forma eficaz, en la gestión y organización de sistemas complejos.*



La IO ha mejorado muy significativamente la eficiencia de muchas organizaciones en todo el mundo, mediante aplicaciones que ayudan a la tomas de decisiones complejas, que requieren grandes inversiones y/o cambios en profundidad en el diseño de la organización. La IO podría estar empleando la cuarta parte del tiempo total utilizado por los ordenadores para resolver problemas científicos.

Hay quien encuentra antecedente remotos en varias disciplinas:

- Matemáticas: los modelos lineales de Farkas y Minkowski, en el siglo XIX
- Estadística: estudio de los fenómenos de espera por Erlang y Markov en los años 1920s
- Economía: El tableau Economique de Quesnay (x.XVIII), y otros desarrollos de Walras (s.XIX) y Von Neumann (años 1920s)

Sin embargo, el origen de la IO moderna se sitúa en la 2ª Guerra Mundial y en el bando aliado. Posiblemente contribuyó en gran medida a que ganaran la guerra. De hecho, alguno de los descubrimientos de esos años (el control de calidad secuencial de Wald) continuó siendo secreto militar hasta varios años después de terminada la guerra. Los ejércitos son organizaciones complejas con problemas complejos de coordinación y logística, de producción y distribución de armas, de intendencia, de estrategias de avance y despliegue de tropas. El mando aliado reunió a científicos de diversas áreas (matemáticos, físicos, ingenieros, estadísticos, economistas, entre otros) para abordar esos problemas complejos. El nombre de IO viene de ese objetivo bélico: investigar las operaciones (militares).

Al terminar la guerra, tuvo un enorme desarrollo en la industria y en las universidades, con avances teóricos muy significativos y aplicaciones prácticas que se iban expandiendo con el avance de los ordenadores. Centros y personas como la Corporación RAND (donde trabajaba Dantzig, quien resolvió con un algoritmo la programación lineal, que es uno de los métodos estrella de la IO), la universidad de Princeton (Gomory, Kuhn, Tucker), el Carnegie Institute of Technology (Charnes, Cooper) destacan en ese panorama. Hoy en día, las grandes empresas tienen departamentos de IO y hay sociedades científicas nacionales e internacionales, y revistas específicamente dedicadas a la IO. Sus aplicaciones han traspasado la industria y el ejército, y hoy en día los servicios se organizan y planifican con métodos de IO.

*Lo que caracteriza a la IO es su método, una forma de abordar los problemas complejos que le es propia.*

También en sanidad hay desarrollos y aplicaciones interesantes, a las que dedicaremos este capítulo.

En sentido estricto, la IO no es una disciplina, pues precisamente está en su naturaleza el carácter interdisciplinar y orientado a los problemas, no a los métodos. Sin embargo, con el transcurso de los años se han acumulado una gran cantidad de algoritmos de IO, que se enseñan en departamentos universitarios de matemáticas, estadística, ingeniería de organización y economía de la empresa. En la práctica, la aplicación de la IO en sanidad requiere tanto del profesional sanitario como del experto cuantitativo.

Lo que caracteriza a la IO es su método, una forma de abordar los problemas complejos que le es propia. Al método de la IO dedicamos el siguiente apartado.

## 2. Fases en la aplicación. El "método" de la IO

En todo abordaje de un problema complejo por la IO, se sigue la siguiente secuencia de fases:

**Fases de la INVESTIGACIÓN OPERATIVA para el abordaje de un problema complejo:**

1. Definición del problema
2. Formulación del problema y construcción del modelo
3. Resolución
4. Verificación, validación, refinamiento
5. Interpretación y análisis de resultados
6. Implantación y uso extensivo

A lo largo de todo ese proceso debe haber una interacción constante entre el analista y el cliente (usuario).

La **definición del problema** consiste en identificar los elementos de decisión: objetivos (uno o varios, optimizar o satisfacer); las alternativas posibles; las limitaciones del sistema.

El problema se formula como un **modelo**, representación simplificada de la realidad, que facilita su comprensión y el estudio de su comportamiento. El modelo debe mantener un equilibrio entre sencillez y capacidad de representación. En IO, los modelos son **matemáticos** (expresados en términos matemáticos). En ellos, se manifiestan claramente la estructura y las relaciones entre las partes. Los modelos matemáticos facilitan el uso de técnicas matemáticas, algoritmos y programas informáticos.

Para construir un modelo matemático hay que traducir el problema a términos matemáticos, especificando en su caso cuál es la función objetivo y las alternativas (variables de decisión), y cuales son las limitaciones del sistema (restricciones matemáticas).

La fase de **resolución** consiste en  determinar los valores de las variables de decisión de modo que la solución sea óptima (o satisfactoria), sujeta a las restricciones. Para llegar a esa solución muchas veces se pueden emplear distintos algoritmos, y distintas formas de aplicarlos.

Cuando el sistema es demasiado complejo para ser formulado en términos de ecuaciones matemáticas que puedan resolverse analíticamente, la IO recurre a métodos heurísticos y a la simulación.

Un **método heurístico** se caracteriza porque es capaz de resolver el problema (aunque no resuelva cualquier problema general, aunque no sea elegante o fundamentado en una teoría general). No siempre encuentra la mejor solución, ni garantiza que la solución óptima encontrada sea única, pero encuentra soluciones razonablemente próximas al óptimo.

La **simulación** se considera el abordaje de último recurso: cuando no eres capaz de modelizar matemáticamente un sistema complejo, rómpelo en sus componentes y simula su funcionamiento y las interrelaciones entre sus partes. Observando como se comporta el sistema simulado (modelo de simulación) se puede pronosticar cómo reaccionaría el sistema real frente a determinados estímulos o políticas.

Se dice que la modelización es a la vez una ciencia y un arte. Es una ciencia que analiza relaciones entre las partes y  aplica algoritmos de resolución. Pero es también un arte, los buenos modelizadores son capaces de abstraer de la realidad lo que es relevante para definir el sistema, y lo plasman en un modelo con estilo, elegancia, simplicidad; usan creativamente las herramientas; y ganan con la experiencia.

La fase de **verificación y validación** consiste en eliminar errores y comprobar en la medida de lo posible que el modelo se adapta a la realidad.

En la fase de **interpretación y análisis** se valora la robustez de la solución óptima que se ha obtenido, haciendo un **análisis de sensibilidad** (¿cambia mucho la solución óptima si se alteran marginalmente las restricciones o algunos de los parámetros del modelo?). En esta fase, a veces se buscan también soluciones cuasi-óptimas atractivas y robustas.

Por último, en la fase final de **implementación** se establece el sistema de ayuda y mantenimiento, la documentación y los planes de formación de usuarios.

## 3. La IO como profesión

Hoy en día, sigue habiendo un gran desarrollo de la IO en muchos sectores, con grandes avances sobre todo en el campo de la Inteligencia Artificial y redes neuronales. Los Sistemas de Información Geográfica han dado un nuevo impulso a la IO.

Hay **asociaciones** profesionales, algunas de las cuales son éstas:

Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa. (SEIO)

www.cica.es/aliens/seio

Association of European O.R. Societies (EURO)

www.ulb.ac.be/euro/euro_welcome.html

Institute for O.R. and the Management Science (INFORMS)

www.informs.org

International Federation of O.R. Societies (IFORS)

www.ifors.org

Entre las **revistas** científicas que publican aplicaciones de la IO a la sanidad y salud, destacamos las siguientes:

| Revista | Portal Web |
|---|---|
| European Journal of Operational Research | http://www.journals.elsevier.com/european-journal-of-operational-research/ |
| Health Care Management Science | http://www.springerlink.com/content/1386-9620 |
| Interfaces | http://interfaces.journal.informs.org/ |
| Journal of Management in Medicine | http://www.emeraldinsight.com/journals.htm?issn=0268-9235 |
| Journal of the Operational Research Society | http://www.palgrave-journals.com/jors/index.html |
| Management Science | http://www.informs.org/Pubs/ManSci |
| Medical Decision Making | http://mdm.sagepub.com/ |
| Operations Research | http://or.journal.informs.org/ |
| Operations Research and Health Care | http://www.springerlink.com/content/978-1-4020-7629-9#section=520502&page=1 |

Algunos de los paquetes de **software** profesional y para docencia son los siguientes:

| Software | Observaciones |
|---|---|
| AIMMS | Profesional. http://www.aimms.com/ |
| COIN/OR: Computational Infrastructure for Operations Research | Software libre. http://www.coin-or.org/ |
| GLPK (GNU Linear Programming Kit) | Software libre. http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html |
| GNUMERIC | Software libre. http://projects.gnome.org/gnumeric/ |
| Operations Research 3.0 | Modulos para el software Mathematica. Profesional |
| SAS/OR 9.3 | Forma parte del paquete SAS. Profesional |
| WinQSB 2.0 | Software libre. Facil de usar, util para principiantes y docencia.Se puede descargar de múltiples sitios web |

La revista Informs tiene una revisión de software de IO: http://www.informs.org/Apply-Operations-Research/Software-Reviews

## 4. Taxonomía de los modelos de IO

Los modelos de la IO suelen clasificarse según el tipo de algoritmo que usan, según la disciplina primaria en la que se basan, o según los ámbitos de aplicación.

Una clasificación conveniente diferencia entre modelos deterministas y modelos estocásticos. En los primeros no interviene el azar, mientras que los segundos se basan en la gestión estadística de la incertidumbre. La tabla 1 contiene una lista de modelos de IO que se atiene a esa clasificación.

*Una clasificación conveniente diferencia entre modelos deterministas y modelos estocásticos. En los primeros no interviene el azar, mientras que los segundos se basan en la gestión estadística de la incertidumbre.*

*Tabla 1. Modelos de IO*

| Modelos determinísticos | Modelos estocásticos |
|---|---|
| Programación matemática | |
| Programación lineal | Programación estocástica |
| Programación entera | Gestión de inventarios |
| Programación dinámica | Fenómenos de espera (colas) |
| Programación no lineal | Teoría de juegos |
| Programación multiobjetivo | Simulación |
| Modelos de transporte | Cadenas de Markov |
| Modelos de redes | Control estadístico de calidad |

### 4.1 La programación lineal

La **programación lineal (PL)** es la base de muchos otros modelos. Por eso, vale la pena dedicar unos minutos a escribir un modelo de PL y poner un ejemplo sanitario. La PL es un caso particular de la **programación matemática**, en el que todas las funciones son lineales. Se trata de optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal, llamada **función objetivo**, sujeta a una conjunto de restricciones lineales de desigualdad. Las variables del problema ($X_1$, $X_2$, …$X_n$) solo pueden tomar valores no negativos, y son continuas.

*La función objetivo podría ser maximizar los beneficios, o los ingresos, la cobertura sanitaria o la actividad quirúrgica, o bien minimizar los costes.*

La función objetivo podría ser maximizar los beneficios, o los ingresos, la cobertura sanitaria o la actividad quirúrgica, o bien minimizar los costes.

**Un ejemplo.**

Una red de centros de rehabilitación ha decidido atender dos nuevos tipos de pacientes en sus tres centros, A,B y C, que tienen capacidad no utilizada. A puede atender a 90 nuevos pacientes, B a 200 y C a 60. Las previsiones de demanda estiman ésta en 160 pacientes de tipo 1 y 130 pacientes de tipo 2. El centro A no puede atender a pacientes de tipo 2 por falta de infraestructura.

Los rendimientos unitarios por paciente (beneficios, o ingresos, o efectividad; desde la perspectiva del problema es lo mismo) son los siguientes:

| | Rendimiento por paciente | |
|---|---|---|
| Centro | Paciente tipo 1 | Paciente tipo 2 |
| A | 35 | - |
| B | 80 | 50 |
| C | 40 | 20 |

Se trata de decidir cuántos pacientes de cada tipo se atenderán en cada uno de los centros para maximizar el rendimiento total.

**Formulación**

El problema tiene cinco variables $X_{ij}$ (i=A,B,C; j=1,2). Puesto que $X_{A2}$ ha de ser cero, ya no la definimos. En problemas reales, i y j son grandes. Frecuentemente los problemas tienen cientos de variables de decisión.

La función objetivo es maximizar el rendimiento total, que es la suma de los cinco rendimientos.

Hay dos restricciones de demanda que indican que no se puede asignar a mas pacientes de cada uno de los tipos que los que demandan la rehabilitación.

Además, hay tres restricciones de capacidad, una por centro, que señalan el número máximo de pacientes a los que se puede atender.

Finalmente, hay que añadir las restricciones de no negatividad que están en todos los problemas de PL.

El problema, expresado en notación matemática, es:

$$
\begin{aligned}
&MaxZ = 35X_{A1} + 80X_{B1} + 50X_{B2} + 40X_{C1} + 20X_{C2}\\
&\text{sujeto a:}\\
&X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} \leq 160\\
&X_{B2} + X_{C2} \leq 130\\
&X_{A1} \leq 90\\
&X_{B1} + X_{B2} \leq 200\\
&X_{C1} + X_{C2} \leq 60\\
&X_{ij} \geq 0; i = A, B, C; j = 1, 2
\end{aligned}
$$

**Solución**

La solución de este problema, obtenida con un algoritmo llamado **método del simplex**, es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&Z^* = 16150\\
&X_{A1} = 30\\
&X_{B1} = 130\\
&X_{B2} = 70\\
&X_{C1} = 0\\
&X_{C2} = 60
\end{aligned}
$$

## 4.2 Otros problemas de programación matemática

Hemos presentado el modelo básico de PL. Si hay mas de una función objetivo (y los distintos objetivos pueden ser conflictivos, por ejemplo queremos maximizar la cobertura pero también reducir los costes lo máximo posible), utilizaremos **programación multicriterio**. Si las variables del problema solo pueden tomar valores enteros (por ejemplo, son los números de médicos y enfermeras que hay que asignar a cada turno de trabajo), entonces utilizaremos **programación entera.** Si además de enteras son variables binarias (solo pueden tomar los valores cero y uno), estamos ante la **programación binaria**. Cuando las decisiones han de tomarse secuencialmente, y cada decisión condiciona el futuro, se puede utilizar **programación dinámica**.

Cuando la función objetivo es no lineal, estamos ante un problema de **programación no lineal** (por ejemplo, programación cuadrática).

La lista de problemas (con sus respectivos algoritmos de resolución) va creciendo. A título ilustrativo, en la tabla 2 enumeramos problemas tipo de IO, todos ellos relacionados con la programación lineal, que cuentan con algoritmos eficientes de solución. En la tabla hemos indicado un ejemplo de aplicación al ámbito sanitario.

## 4.3 Problemas-tipo derivados de la programación lineal y ejemplos de aplicación en sanidad

*Tabla 2. Problemas tipo de IO (programación matemática)*

| Problema tipo | Ejemplo de aplicación en sanidad |
|---|---|
| Problema del transporte | En un área hay n centros de salud que tienen que atender a una pobación total radicada en m barrios. Cada centro tiene una determinada capacidad (número máximo de pacientes asignados). Se conoce el coste de acceso (tiempo, distancia) de cada barrio a cada centro de salud. El objetivo es calcular el número de personas de cada barrio que deben ser asignadas a cada uno de los centros para minimizar el coste total de acceso. En este problema, hay mxn variables de decisión. |
| Problema de asignación | Mapa sanitario: en una región hay m hospitales que deben atender a una población distribuida en m (m>n) comarcas o barrios. Se conocen las distancias de cada barrio a cada hospital, la capacidad máxima de los hospitales y el tamaño de cada población. El algoritmo encuentra la asignación óptima de los barrios a los hospitales en el sentido de minimizar el coste total de acceso (suma de distancias)[1]. |

| | |
|---|---|
| Problema de la mochila (knapsack) | En su formulación genérica, se trata de llenar una mochila con objetos con pesos y utilidades o valores diferentes, maximizando el valor total y respetando el peso máximo que se puede cargar. En sanidad, podría aplicarse para asignar pacientes a un servicio (centro, quirndar preestablecidastancia ). formulaciravedad o prioridad relativa (el peso"al de acceso (suma de distancias).idad de los hosa.ófano,…) que tiene capacidad limitada. Los pacientes vienen definidos por su gravedad o prioridad relativa (es la utilidad o valor en la formulación genérica) y el tiempo de utilización del servicio (el "peso" del objeto en la formulación genérica). El problema consiste en encontrar qué pacientes serán atendidos y cuales habrá que derivar a otro centro (dejar fuera de la mochila). |
| Problema del emparejamiento (matching) | Emparejar n puestos de trabajo con distintos requerimientos y n candidatos, con distintas habiliadades. El objetivo es maximizar el rendimiento (habilidad ejercitada) total |
| Problema del recubrimiento (set-covering) | El problema de *Localización de Servicios con Cobertura* consiste en determinar el número mínimo de centros y dónde han de localizarse para que toda la población esté cubierta y a menos de una distancia estándar preestablecida |
| Problema de partición (set-partitioning) | Es un caso particular de programación binaria, y su aplicación más conocida es la asignación de tripulaciones de compañías aéreas a rutas. El objetivo es minimizar el coste total. Hay un conjunto de rutas entre ciudades que es preciso cubrir con las tripulaciones disponibles. El problema puede emplearse para programar la atención domiciliaria de un equipo de enfermeras ("tripulaciones") |
| Problema de rutas óptimas | Hay un amplio conjunto de problemas que consisten en hacer la planificación temporal de proyectos complejos y su secuenciación. Los métodos de CPM y PERT determinan las rutas óptimas, de mínimo tiempo (cronograma, o secuencia de actividades a realizar) marcando el **camino crítico** y detectando holguras (tiempos que pueden "perderse" sin alterar la duración total del proyecto). El CPM es determinista, el PERT admite variaciones aleatorias, con distribuciones sencillas, de los tiempos de cada actividad |

## 5. La IO en sanidad. Un panorama

Está claro que la sanidad es un excelente campo para aplicar la IO, pues sus organizaciones son complejas y se han de planificar, coordinar y gestionar gran cantidad de recursos físicos, humanos y financieros. La IO ayuda a planificar, organizar, localizar y distribuir recursos sanitarios; a predecir la utilización; a evaluar la calidad y la eficiencia de los servicios; a conocer el coste-efectividad de las nuevas tecnologías.

*La IO ayuda a planificar, organizar, localizar y distribuir recursos sanitarios; a predecir la utilización; a evaluar la calidad y la eficiencia de los servicios; a conocer el coste-efectividad de las nuevas tecnologías.*

Algunos ejemplos de aplicación de la IO en sanidad son:

### Ejemplo 1. Gestión de listas de espera

Los pacientes en las listas, categorizados por prioridad clínica, *También detecta las ineficiencias y cuellos de botella en el sistema y encuentra opciones alternativas para el uso de los recursos disponibles.*

acceden a las consultas, pruebas e intervenciones. Un modelo asigna eficientemente pacientes a recursos (hospitales) y los secuencia, optimizando el uso de los recursos. También detecta las ineficiencias y cuellos de botella en el sistema y encuentra opciones alternativas para el uso de los recursos disponibles.

### Ejemplo 2.Matching o emparejamiento

Los algoritmos de matching se emplean para emparejar oferta y demanda de plazas de MIR (residencia médica) en EEUU, donde hay un algoritmo muy sofisticado, que hasta permite incluir restricciones de la pareja y las preferencias y posibilidades de ambas partes, médicos y hospitales. Algo similar ocurre con los algoritmos de emparejamiento entre donantes (órganos) y receptores de trasplante. Además de la compatibilidad genética (restricciones del problema) hay prioridades (urgencia, gravedad, tiempo en la lista) y preferencias (donantes que sólo ceden su órgano a determinado paciente, su familiar). No es casualidad que el mismo científico, Roth, sea autor de ambos algoritmos, el de los MIR y el de los órganos.

### Ejemplo 3. Modelos de colas

Los modelos de teoría de la colas se han usado, por ejemplo, para optimizar el funcionamiento de servicios de urgencia. Mediante modelos de colas se analiza (o simula) el funcionamiento del 061 considerando la estacionalidad, los picos de demanda a determinadas horas, los turnos de trabajo, los efectivos disponibles, etc. Con objeto de optimizar el servicio (¿cuántos trabajadores de cada tipo, telefonistas, médicos clasificadores, ambulancias medicalizadas, etc hay que tener disponibles por dia de la semana y tramo horario, para optimizar el sistema?).

### Ejemplo 4. Modelo de simulación de oferta y demanda/ necesidad de médicos especialistas

Un modelo, que ya va por la tercera edición[1], simula la dinámica

1 *Barber, P y B Gonzalez (2011) "Oferta y necesidad de especialistas medicos en España 2010-2025". Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad. Accesible en:* http://www.msps.es/novedades/docs/OfYneceEspMedicos_ESP_2010_2025_03.pdf

de la oferta de médicos especialistas, por especialidades, hasta un horizonte temporal de largo plazo (2025) a partir de la distribución etaria actual y de las decisiones de política de recursos humanos (numerus clausus en Medicina, numero de plazas MIR convocadas anualmente, edad de jubilación, política de inmigraciones y homologación de títulos). Por otra parte, el modelo de necesidad establece estándares poblacionales de necesidad de tipo normativo (los expertos los fijan) y a partir de las previsiones demográficas, y calcula el número de especialistas que necesitará el país cada año. Finalmente, se comparan oferta y necesidad y se calcula el déficit o superávit.

### Ejemplo 5. Gestión y planificación de turnos de trabajo

Dada la plantilla, las necesidades y las restricciones legales, se utilizan métodos de programación entera para decidir turnos, horarios y guardias sobre una base semanal, mensual o anual. En los centros sanitarios hay que cumplir una larga lista de restricciones normativas sobre número de turnos consecutivos permitidos (salientes de guardia), número de horas laborables por semana, fines de semana, turnos de noche, vacaciones y antigüedad, y en la medida de lo posible, incorporar preferencias personales y de subgrupos.

### Ejemplo 6. Planificación de rutas

Los modelos de optimización tienen un gran campo en la planificación de las rutas a seguir por los servicios de atención domiciliaria en sanidad y en el sector socio-sanitario. El problema del viajero (que ha de visitar una lista de lugares y debe determinar la ruta óptima) puede fácilmente trasladarse a la cobertura domiciliaria de una población encamada por parte del equipo de un centro de salud, por ejemplo.

### Ejemplo 7. Problemas de logística de la cadena de suministro de materiales y productos farmacéuticos

La gestión de almacenes (gestión de stocks) ha avanzado mucho en los últimos años, tanto en la industria como en servicios. En centros sanitarios y en farmacias estos métodos permiten definir políticas óptimas de pedido que minimicen el coste total. Este coste es la suma del coste de almacenamiento (tener productos almacenados cuesta, y el espacio es limitado) y el coste de ruptura (no tener el producto cuando se necesita: suspender una intervención quirúrgica por falta de sangre, por ejemplo).

### Ejemplo 8. Modelos de programación lineal para medir la eficiencia de centros asistenciales

Los modelos de Análisis Envolvente de Datos consisten en aplicar programación lineal para medir y comparar la eficiencia técnica de una muestra homogénea de centros, sean hospitales, servicios o centros de salud. Otro capítulo de este manual profundiza en esos modelos que en sentido amplio pueden considerarse dentro de la IO

### Ejemplo 9. Zonificación y mapas sanitarios. Localización de centros y cobertura poblacional

Estos modelos ayudan a elegir las localizaciones óptimas para los centros asistenciales y para otros recursos (ejemplo, centrales de ambulancias) de forma que se cubra a toda la población, asignando zonas geográficas a centros de modo que se minimice alguna función de costes (costes totales, de acceso y de construcción).

*Obtienen, mediante fórmulas matemáticas, los parámetros de interés de un sistema o red de colas, que permiten tomar decisiones eficientes (por ejemplo, ¿cuántos profesionales hay que poner en la puerta de urgencias?).*

## 6. Aplicaciones en sanidad de los modelos de colas o listas de espera

Hay modelos analíticos de colas, que obtienen, mediante fórmulas matemáticas, los parámetros de interés de un sistema o red de colas, que permiten tomar decisiones eficientes (por ejemplo, ¿cuántos profesionales hay que poner en la puerta de urgencias?).

### Conceptos básicos

Todos los sistemas de colas tienen **clientes** y **servidores**, en serie (un servidor da un servicio, terminado el cual el cliente pasa al siguiente, por ejemplo recepción en consultas externas y atención del médico) y/o en paralelo (por ejemplo, cuatro administrativos están atendiendo simultáneamente en el mostrador de admisión del hospital). El número de servidores en paralelo del sistema de colas se nota con la letra s.

*Los modelos de colas suponen distribuciones de probabilidad de los tiempos entre llegadas de clientes y distribuciones de probabilidad de los tiempos de servicio de cada servidor.*

Los modelos de colas suponen distribuciones de probabilidad de los tiempos entre llegadas de clientes y distribuciones de probabilidad de los tiempos de servicio de cada servidor. Tanto las llegadas de los clientes como los tiempos que tardan en ser atendidos son **procesos estocásticos** –sucesiones de variables aleatorias.

Hay una variedad de modelos de colas que pueden ser resueltos con fórmulas, los más utilizados suponen distribuciones exponenciales de los tiempos entre llegadas y de servicio (que equivalen a distribuciones de Poisson de las respectivas tasas). Otras distribuciones de amplio uso en colas son la de Erlang (que generalizan la exponencial), la uniforme y la degenerada (varianza cero, es la distribución del tiempo de servicio de una máquina automática). También hay fórmulas generales para cualquier distribución de probabilidad, conocida su desviación estándar, siempre que los procesos cumplan ciertas propiedades.

Los modelos de colas pueden incorporar analíticamente fenómenos de la "**prisa**" del servidor (a medida que hay mas clientes esperando, el servidor aumenta su velocidad en el servicio) y el fenómeno de la "**impaciencia**" del cliente (si llegas a una cola y es muy larga, te vas sin esperar).

Asimismo, incorporan clases de **prioridad** de los clientes (según urgencia o gravedad, los de clase A tienen prioridad).

La fuente de clientes –**población** de la que emanan- puede ser **finita** o **infinita**. Por ejemplo, la población de clientes potenciales de un centro de salud puede considerarse virtualmente infinita, en la práctica será de miles de personas. Estadísticamente, infinita implica que el número de pacientes que está en el centro de salud no afecta a la probabilidad de que un cliente más intente llegar a la consulta. Un ejemplo de población finita de tamaño 4 sería el de un operario (servidor) que tiene que dar mantenimiento a cuatro máquinas idénticas (población de clientes). Si una máquina está estropeada, solo quedan tres que puedan acceder como clientes al sistema de colas, por tanto la tasa de llegadas de los clientes al sistema depende del número de clientes que ya está en el mismo.

La **cola** puede ser **finita** o **infinita**. En general, se considerará infinita salvo que haya restricciones al número máximo de clientes que pueden estar esperando por problemas de cabida (ejemplo, el número de camillas que caben en un pasillo esperando entrar en la sala de rayos).

Los **parámetros** de mayor interés en los sistemas de colas para la toma de decisiones son:

- Tiempo medio de espera, en el sistema (W) y en la cola ($W_q$)
- Número medio de clientes en el sistema (L) y en la cola ($L_q$)
- Probabilidad de que el sistema esté vacío ($P_0$)
- Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (n=0,1,2,…): $P_n$
- Probabilidad de esperar $=1-(P+P_1+\ldots+P_s)$
- Coste total, coste del servicio y coste de la espera

Cuando se habla de "**sistema**" se entiende que abarcamos a todos los clientes, incluyendo los que están esperando y los que están siendo atendidos. Cuando se habla de "**cola**", únicamente se está haciendo referencia a los que están esperando a ser atendidos.

La **notación** ya clásica, debida a Kendall, para representar los modelos de colas es una sucesión de letras y números separados por un símbolo/. Por ejemplo:

M/M/1 significa que es un modelo de colas con distribuciones exponenciales de los tiempos entre llegadas y de servicio y que hay un solo servidor

M/E3/2 significa que es un modelo de colas con distribución exponencial del tiempo entre llegadas y distribución de Erlang de parámetro 3 del tiempo de servicio, y que hay dos servidores en paralelo atendiendo a los clientes

**Un ejemplo sencillo de modelo M/M/1 con población y cola infinitas**

Los clientes son pacientes que llegan aleatoriamente a un servicio de información a la entrada del un centro asistencial, a una tasa media de 8 clientes por hora (l). Hay un solo servidor para atender a los clientes, y puede trabajar a un ritmo promedio de 10 clientes por hora (m), es decir, tarda en promedio 6 minutos en atender a un cliente. Suponemos que la población potencial es infinita y que no hay limitación física en la cola.

En este ejemplo, la tasa de llegadas es l=8 y la tasa de servicio es m=10. La tasa de utilización se calcula como

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.8$$

indicando que el 80% del tiempo el servidor estará ocupado. La probabilidad de que el sistema esté vacío es:

$$P_0 = 1 - \rho = 0.2$$

El 20% del tiempo el servidor estará desocupado.

Mediante fórmulas sencillas se pueden calcular los parámetros de este modelo de colas:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{10-8} = 0.5 \text{ horas} = 30 \text{ minutos en promedio cada clientes estará en el sistema}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{8}{10(10-8)} = 0.4 horas = 24 \text{ minutos en promedio esperando en la cola}$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{8}{10-8} = 4 \text{ clientes en promedio en el sistema}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{64}{10(10-8)} = 3.2 \text{clientes en promedio en la cola}$$

## Ejemplo de modelo M/M/s con población y cola infinitas

En esta variante del ejemplo anterior nuestro objetivo es determinar el número óptimo de servidores (s) que debemos asignar al servicio de información para minimizar el coste total. Hay s servidores para atender a los clientes (que forman una única cola, puede ser física o con un dispositivo repartidor de números). Todos los servidores tienen tiempos de servicio idénticos, distribuidos exponencialmente con tiempo medio de 6 minutos por cliente. Ahora suponemos que la tasa de llegadas es l=35 clientes por hora (es decir, en promedio llega un cliente, aleatoriamente, cada 1.7 minutos). El coste del servicio (coste de oportunidad de cada servidor, su salario) es 10 euros por hora, y el coste de oportunidad de la espera de cada cliente es de 4 euros por hora.

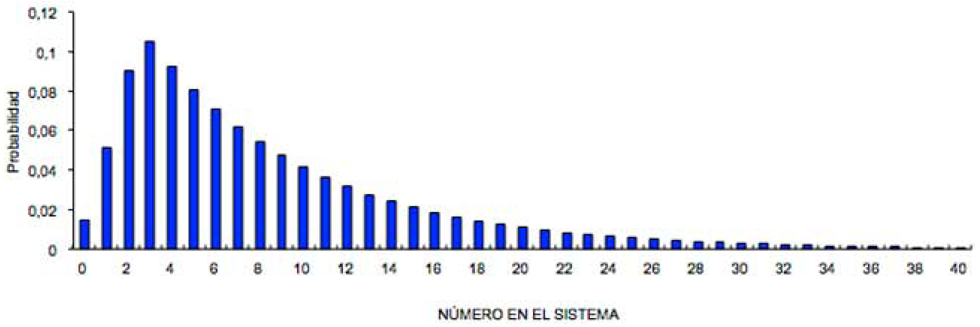
Existen fórmulas para calcular los parámetros de este sistema, y su coste, suponiendo distintos valores de s. El número mínimo de servidores que hay que asignar para que el sistema sea estable es s=4, ya que el factor de utilización ha de ser menor que la unidad para que la cola no vaya creciendo indefinidamente (sistema explosivo):

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{35}{10s} < 1 \Rightarrow s \geq 4$$

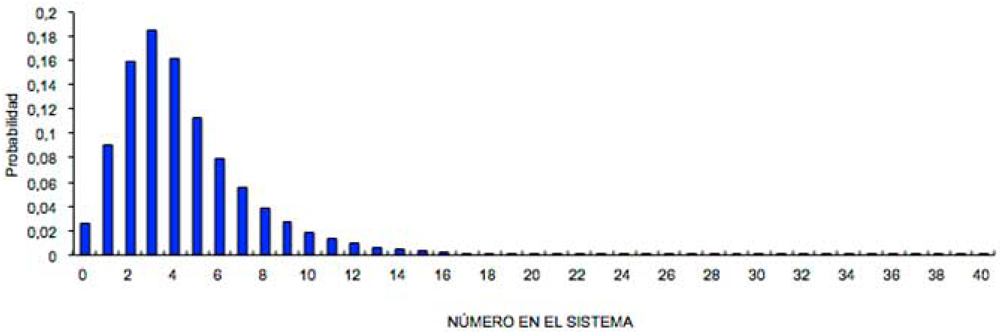
La tabla siguiente ofrece los parámetros del sistema para s=4,5,6.

| Parámetro | S=4 | S=5 | S=6 |
|---|---|---|---|
| Factor de utilización $\rho$ | 0.8750 | 0.7 | 0.5833 |
| $P_0$ | 0.0148 | 0.0259 | 0.029 |
| $L_q$ | 5.1650 | 0.8816 | 0-2485 |
| L | 8.6650 | 4.3816 | 3.7485 |
| $W_q$ | 0.1476h=8.85 minutos | 0.0252h=1.51 minutos | 0.0071h=0.42 minutos |
| W | 0.24764h=14.8 minutos | 0.1252h=7.51 minutos | 0.1071h=6.4259 minutos |
| Probabilidad de esperar | 0.7379 | 0.3778 | 0.1775 |

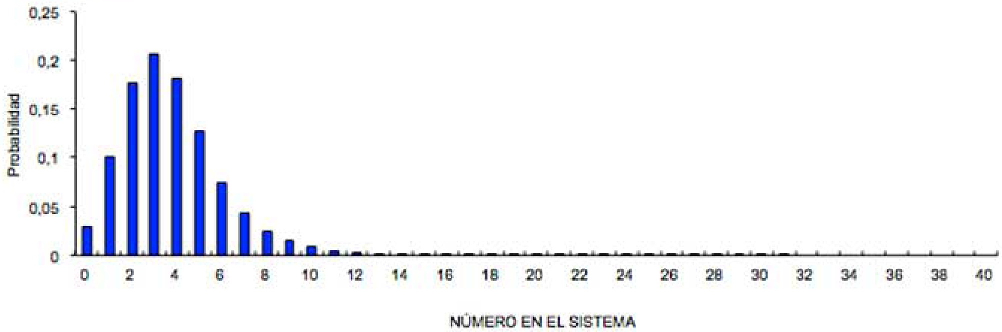
Para cada s se puede calcular la distribución de probabilidad del número de clientes en el sistema ($P_n$). Para s=4, es la siguiente:




Para s=5 es ésta:




Para s=6:




Con cuatro servidores, el 73.79% de los clientes esperan, y el tiempo medio en este sistema es de 14.8 minutos por cliente, de los que casi 9 minutos (8.85) está esperando. Con seis servidores, prácticamente no se espera (menos de medio minuto, 0.42).

El coste total por hora es la suma del coste directo del servicio igual a 10s, mas el coste de oportunidad de la espera, que se

*Cualquier evaluación económica implica identificar, cuantificar y valorar los costes y resultados de los programas alternativos ¿cómo podemos cuantificar y valorar beneficios, costes y utilidades?.*

puede calcular como 4L. Los resultados (tabla siguiente) indican que la solución óptima (de mínimo coste) es asignar 5 servidores a este servicio. Si ahora hay seis, convendría reasignar a uno de los servidores a otra tarea y dejar únicamente a cinco personas atendiendo ese servicio

| Coste por hora | S=4 | S=5 | S=6 |
|---|---|---|---|
| Del servicio | 40 | 50 | 60 |
| De espera | 34.66 | 17.53 | 14.994 |
| Total | 74.66€ | 67.5€ | 74.99€ |

## 7. Uso de los árboles de decisión y de los modelos de markov en evaluación económica de tecnologías sanitarias

Cualquier evaluación económica implica identificar, cuantificar y valorar los costes y resultados de los programas alternativos ¿cómo podemos cuantificar y valorar beneficios, costes y utilidades?. La evaluación económica de tecnologías médicas (medicamentos y otras) requiere que la efectividad de la innovación sea comparada con la efectividad del tratamiento estándar. Efectividad es la mejora de salud, el resultado clínico, en pacientes y poblaciones reales, a diferencia de la eficacia, que determinan los ensayos clínicos para pacientes "ideales" (los que cumplen los criterios de inclusión en el ensayo que suelen ser mas sanos y jóvenes, pues solo padecen la enfermedad que se trata, sin coλmorbilidades).

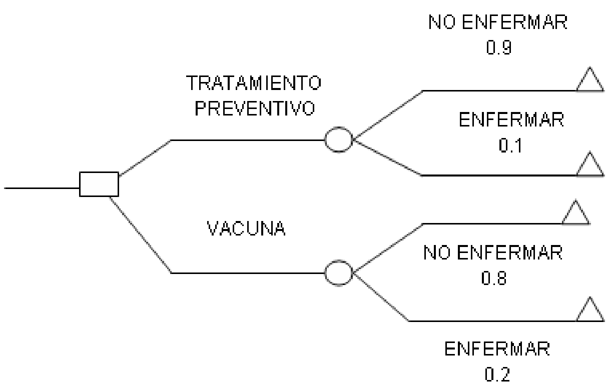
Para evaluar la **efectividad** (y el coste) del tratamiento nuevo comparado con la historia natural de la enfermedad si no se le da ese tratamiento al paciente se suelen usar dos herramientas, los arboles de decisión y las cadenas de markov. Son herramientas de la IO que se usan en otros muchos contextos. La especialización sanitaria se traduce en software específico y una amplia lista de aplicaciones a diversas enfermedades y tratamientos. Incluso la farmacoeconomía se ha convertido en una (sub)profesión, y entre sus herramientas mas importantes están las cadenas de markov y los árboles de decisión.

## Los árboles de decisión

Un árbol de decisión nos permite, mediante una estructura ramificada (forma de árbol), representar y desplegar secuencialmente las decisiones y eventos probabilísticos que pueden sucederse ante una decisión.

*Un árbol de decisión nos permite, mediante una estructura ramificada (forma de árbol), representar y desplegar secuencialmente las decisiones y eventos probabilísticos que pueden sucederse ante una decisión.*

Suponga que para luchar contra una determinada enfermedad es posible utilizar una vacuna o, alternativamente, utilizar un tratamiento preventivo. Si la persona se vacuna, la probabilidad de no padecer la enfermedad es del 80%, mientras que si la selección que hizo fue utilizar tratamiento preventivo la probabilidad de no enfermar es del 90%. El siguiente árbol de decisión representa esta situación, en la que, según la nomenclatura de este tipo de herramientas, un cuadrado indica un punto del proceso en el que se ha de tomar una decisión (**nodo de decisión**), los círculos reflejan alternativas o eventos probabilísticas, cuya suma siempre debe ser igual a la unidad (**nodo de probabilidad**) y cada rama finaliza en un resultado, un triángulo como punto final en el proceso (**nodos terminales**).

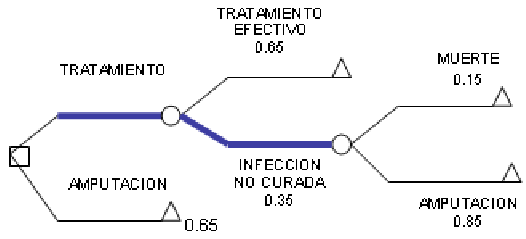



Para poder "moverse" por el árbol es necesario disponer de la información necesaria sobre las probabilidades-efectividades de cada rama. En general, las medidas de efectividad se obtienen de estudios epidemiológicos, de cohorte, ensayos controlados, casos-control o series de casos.

El camino por esta estructura de decisión nos permite obtener probabilidades que dependen de decisiones y eventos probabilísticos anteriores. En el siguiente árbol, la probabilidad de morir tras decidir seguir tratamiento antibiótico y no curarse la infección es del 5,25%, mientras que la probabilidad de amputar por no curar la infección es del 29,7%.

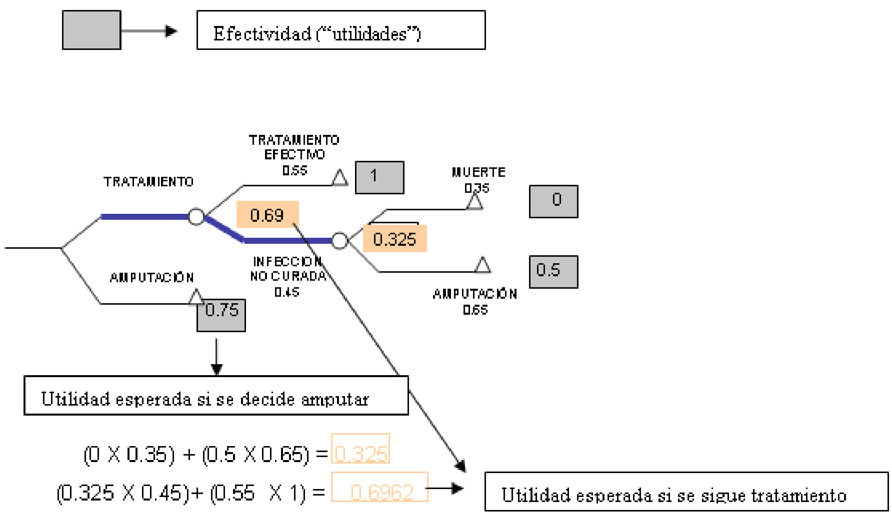
$P = 0.15 \times 0.35 = 0.0525$

$P = 0.85 \times 0.35 = 0.297$




A cada punto final de la rama se le asocia una medida de efectividad y otra de coste.

Las medidas de efectividad pueden asociarse a una medida de utilidad. A cada una de las ramas del árbol le asignamos una media de utilidad entre 0 y 1, de forma que uno represente la máxima utilidad y el cero la mínima. En el siguiente ejemplo hemos valorado la utilidad con un valor máximo a la cura total, 1, valor cero al estado de muerte e intermedios al resto; 0,5 para la amputación tras infección y de 0,75 a la amputación directa.



El producto de las probabilidades por las medidas de utilidad nos proporciona una medida de utilidad asociada a cada nudo de probabilidad y proseguir secuencialmente hacia atrás (***enrollar o plegar* el árbol**). De esta forma, podemos valorar en 0,6962 la utilidad esperada si se sigue tratamiento y en 0,75 la utilidad esperada si se decide amputar.

Por tanto, la opción con mayor efectividad es la amputación directa, con un incremento de efectividad respecto al tratamiento de 0,054.

| Efectividad asociada a cada alternativa | | |
|---|---|---|
| Alternativas | Efectividad | Incremento efectividad |
| Tratamiento | 0,696 | |
| Amputación | 0,75 | 0,054 |

Esos cálculos, y los de los costes asociados, se pueden calcular fácilmente para problemas reales –árboles muy ramificados y frondosos- gracias a software comercial específico[2].

## Las cadenas de markov

Las cadenas de markov son modelos probabilísticos que se usan para predecir como va a evolucionar un sistema a partir de las transiciones entre **estados** o situaciones (por ejemplo, salud de un paciente: sano, fase aguda, cronificado leve; crónico grave; muerto), cuando se conocen las probabilidades de transición a corto plazo (en un "**paso**") y se supone un cierto patrón de recurrencia estable en el tiempo. Por ejemplo, se supone que el 10% de los pacientes sanos entrarán en fase aguda en un año (en el ejemplo, un año es un "paso", que el 5% de los pacientes en estado crónico grave mueren en un año, etc.).

Técnicamente, las cadenas de markov pertenecen a un grupo de modelos llamados **procesos estocásticos**. Las cadenas de markov mas utilizadas son las de **primer orden de estados discretos**. Se utilizan cuando analizamos las alternativas de

2 *Por ejemplo, el TreeAge Pro 2004 HealthCare (TreeAge Software Inc, http://treeage.com/)*

un proceso o enfermedad cuyos estados de salud son finitos. Supongamos que los estados de salud posibles son tres, sano, enfermo o muerto. Las personas pasan por estos estados de salud a lo largo de un periodo de tiempo (día, mes, año, etc…). Transcurrido este ciclo de tiempo permanecerán o cambiaran de estado de salud según un conjunto de **"probabilidades de transición"**, que se asocian a la probabilidad de cambio entre los distintos estados de la enfermedad y se suponen estables en el tiempo. Además, se supone que el futuro inmediato (después de un paso) solo depende del estado actual y no de toda la trayectoria que te ha llevado hasta ahí.

Los estados de una cadena de Markov (estados de salud) pueden ser **transitorios** o **recurrentes**. Si hay una probabilidad positiva de no volver jamás al estado, una vez abandonado, se dice que ese estado es transitorio.

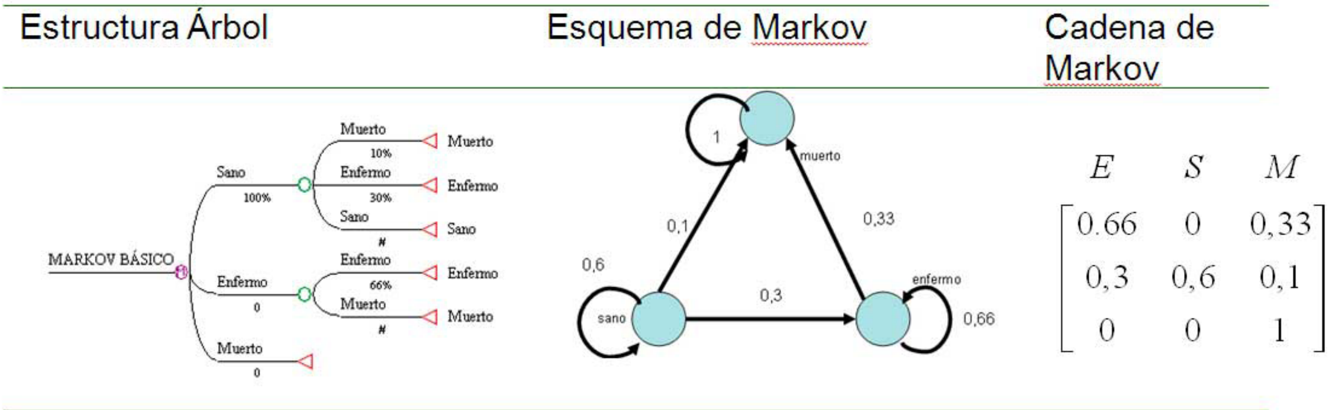
Los estados no transitorios se llaman recurrentes (a largo plazo, si la cadena da un numero suficientemente grande de pasos o transiciones, acabará volviendo a ese estado. Un tipo particular de estado recurrente es el **absorbente:** si, una vez llegados a ese estado (por ejemplo, la muerte) permaneceremos en él indefinidamente, o lo que es lo mismo, la probabilidad de pasar a otro estado de salud transcurrido un ciclo, es cero, el estado será absorbente.

La clasificación puede depender de los objetivos de la investigación. Si el objetivo del estudio es el número de cánceres detectados tras un programa de detección precoz, entrar en el estado "cáncer" será un estado absorbente puesto que la simulación del individuo se da por terminada cuando alcanza este estado o cualquier otro absorbente.

En el ejemplo de la tabla siguiente podemos ver representadas de diversas formas las probabilidades de transición de una cadena de markov en la que supongamos que el ciclo es un año. Existen 3 estados de salud, Enfermo, Sano y Muerte, de los cuales dos son transitorios y uno absorbente. La probabilidad de que un individuo sano este muerto el próximo año es del 10%, de que entre en el próximo año en el estado enfermo es del 30% y de que siga sano es del 60% (las probabilidades de transición deben sumar la unidad). Sin embargo, el estado Muerte es absorbente, pues no se puede salir de ahí.

La forma más habitual de resolver el modelo es a través de la simulación de una hipotética cohorte de individuos que se inician en un estado (por ejemplo, sanos) y a partir de las probabilidades de transición "caminan" a través del árbol hasta que todos han entrado en algún estado absorbente, momento en el que se analizan los resultados. Cuando la cadena es sencilla, se pueden utilizar fórmulas cerradas para calcular los tiempos de absorción (cuantos años vivirá un paciente hoy sano) y otros parámetros de interés.

*Ejemplo Cadena de Markov. Fromas de representación. Probabilidades de transición y clases de estados*




También hay software específico de cadenas de markov, que se aplica en evaluación económica en sanidad[3]

## Ejemplo de una cadena de Markov

En la cadena de markov definida por la matriz de transición de la figura anterior, se puede calcular que se espera que un paciente que hoy está sano sobreviva 5.147 años, de los que 2.9411 estará sano y otros 2.20588 años estará enfermo.

3 *Analytica:* http://www.aati-us.com/support/ce_support.html

*DATA (TreeAge Pro):* http://www.treeage.com/

## Otro ejemplo de cadena de markov: el hábito tabáquico

A partir de encuestas longitudinales a adolescentes, se han determinado las probabilidades de transición entre los estados "Nunca ha fumado", "Fuma pero no diariamente", "Fuma diariamente" y "Ex -fumador". La matriz de transición de esta cadena de markov para un año (=paso) es la siguiente:

| | Nunca ha fumado | Fuma pero no a diario | Fuma diariamente | Ex - fumador |
|---|---|---|---|---|
| Nunca ha fumado | 0.9 | 0.06 | 0.04 | 0 |
| Fuma pero no a diario | 0 | 0.8 | 0.1 | 0.1 |
| Fuma diariamente | 0 | 0.1 | 0.7 | 0.2 |
| Ex - fumador | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |

Las filas suman uno. Se interpreta fácilmente, por ejemplo el 90% de los que nunca han fumado, dentro de un año seguirán sin fumar, pero el 6% estará fumando ocasionalmente y el 4% estará fumando a diario.

El estado "nunca ha fumado" es transitorio, los demás son recurrentes.

De una cohorte de 10.000 adolescentes que no han empezado a fumar, se puede calcular, por ejemplo:

- Cuántos fumarán diariamente dentro de n años (la respuesta para distintos n, en la tabla siguiente):

| Número de años (n) | Número de adolescentes que estarán fumando dentro de n años, de una cohorte inicial de 100.000 | | |
|---|---|---|---|
| | Ocasionalmente | Diariamente | Total |
| 1 | 6.000 | 4.000 | 10.000 |
| 2 | 10.600 | 7.000 | 17.600 |
| 3 | 14.180 | 9.480 | 23.660 |
| 4 | 17.010 | 11.658 | 28.668 |
| 5 | 19.283 | 13.630 | 32.913 |
| 6 | 21.136 | 15.439 | 36.575 |
| 7 | 22.669 | 17.103 | 39.772 |
| 8 | 23.955 | 18.632 | 42.587 |
| 9 | 25.047 | 20.033 | 45.080 |

- Cuántos seguirán sin fumar dentro de 10 años (respuesta: 34.868 personas, es decir, el 34.8%)
- A largo plazo (cuando hayan transcurrido muchos años, si las transiciones se mantuvieran estables con las probabilidades de la tabla anterior), qué porcentaje de la población fumará. Respuesta: dos tercios de la población, un tercio lo hará a diario y el otro ocasionalmente.

Los cálculos para dar esas respuestas se basan simplemente en productos de matrices, y pueden hacerse fácilmente con una hoja de cálculo.

## Conclusión

La IO abarca un amplio conjunto de métodos y herramientas que sirven para optimizar las decisiones en organizaciones sanitarias. El abanico de aplicaciones abarca desde la planificación de infraestructuras y zonificación sanitaria hasta la gestión del día a día de los recursos humanos (guardias, turnos) o la programación de rutas de visitas domiciliarias y tareas. Es a la vez una ciencia y un arte, una profesión y una actividad académica que se desarrolla rápidamente. Para el usuario, hay un buen conjunto de programas de software disponibles para resolver los algoritmos de IO.

## Referencias bibliograficas


1. *C. Azcárate, M. L. Eraso, A. Gáfaro "La investigación operativa en las Ciencias de la Salud: ¿reconocemos estas técnicas en la literatura actual?" Anales Universidad Publica de Navarra*

2. http://www.cfnavarra.es/salud/anales/textos/vol29/n3/revis2.html

3. *Serra D: y H. Ramalhinho: "La contribución de la investigación operativa a la mejora de la eficiencia en el ámbito sanitario"* **Papeles de Economía** *76, 1998, 216-227*

4. *Serra D.(2004) :* **Métodos Cuantitativos para la toma de decisiones; con aplicaciones en el ámbito sanitario***. Ediciones Gestion 2000. ISBN: 84-8088-940-3. Hay una versión accesible en internet:* http://exa.unne.edu.ar/informatica/evalua/Sitio%20Oficial%20ESPD-Temas%20Adicionales/metodos%20cuatitativo.pdf

5. *Rodríguez J.M., Serrano D., Monleón T. y Caro J. (2008). Los modelos de simulación de eventos discretos en la evaluación económica de tecnologías y productos sanitarios. Gaceta Sanitaria; 22: 151 – 161*